Universität Bonn WS 2009/2010
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Stefan Müller
Dr. Patrick Dondl

Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen
Blatt 12
Abgabe: 22. Januar 2010

Aufgabe 51 (4 Punkte)**.** *Schwache Konvergenz in* $W^{1,p}$

(i) Seien X und Y Banachräume. Dann ist $Z = X \times Y$ ein Banachraum mit der Norm $||(x,y)||_Z = ||x||_X + ||y||_Y$. Zeigen Sie: Für jedes $z' \in Z'$ gibt es genau ein $x' \in X'$ und ein $y' \in Y'$ mit $z'((x,y)) = x'(x) + y'(y) \quad \forall x \in X, y \in Y$. Folgern Sie, dass

$$(x_n, y_n) \rightharpoonup (x,y) \text{ in } Z \iff x_n \rightharpoonup x \text{ in } X,\ y_n \rightharpoonup y \text{ in } Y.$$

(ii) Sei X ein Banachraum, Y ein abgeschlossener Unterraum. Sei y_n eine Folge in Y.
Zeigen Sie:

$$y_n \rightharpoonup y \text{ in } Y \iff y_n \rightharpoonup y \text{ in } X.$$

(iii) Seien X und Y Banachräume. Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ invertierbar. Zeigen Sie:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } X \iff Tx_n \rightharpoonup Tx \text{ in } Y.$$

(iv) Sei $1 < p < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: $W^{1,p}(U)$ ist reflexiv und

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } W^{1,p}(U) \iff f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(U) \text{ und } \partial_i f_n \rightharpoonup \partial_i f \text{ in } L^p(U),\ i \in \{1,\dots,n\}.$$

Tipp: Für (iv) betrachten Sie eine geeignete Einbettung von $W^{1,p}(U)$ in einen Unterraum von $L^p(U) \times \cdots \times L^p(U)$ ($n+1$ Kopien) und verwenden Sie (i)–(iii).

Aufgabe 52 (4 Punkte)**.** *Metrisierbarkeit der schwach* Konvergenz*

Sei X separabel und $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sei dicht. Für $x', y' \in X'$ sei

$$[x']_n := \left|\left\langle x_n, x' \right\rangle\right|$$
$$\mathrm{d}(x',y') := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{[x'-y']_k}{1+[x'-y']_k}.$$

(i) Zeigen Sie: $[\cdot]_n$ ist eine Halbnorm auf X' und d ist eine Metrik auf X'.

(ii) Sei $\{x'_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$. Zeigen Sie:

$$x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x' \text{ in } X' \iff \mathrm{d}(x'_j, x') \to 0.$$

Kommentar: Dies zeigt, dass die schwache Konvergenz auf $B_1(0)$ (und damit natürlich auch auf $B_R(0)$) von einer Metrik induziert wird. Vergleiche auch Aufgabe 4.

Warnung: Es gibt i.a. keine Metrik welche schwach* Konvergenz auf dem gesamten Raum X' induziert. Bei obiger Metrik ist das Problem, dass $\mathrm{d}(x'_j, 0) \to 0$ nicht impliziert, dass x'_j beschränkt ist.

Aufgabe 53 (4 Punkte)**.** *Dichte Teilmengen des Dualraumes*
(i) Zeigen Sie:

$$x_n \rightharpoonup x \iff \langle x_n, x' \rangle \to \langle x, x' \rangle \text{ für } x' \in D,\ D \text{ dicht in } X' \text{ und}$$
$$\text{und } \sup_n ||x_n|| < \infty.$$

(ii) Sei $1 < p < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\mathcal{W}$ die Menge aller offenen Würfel, die in U enthalten sind. Zeigen Sie:

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(U) \iff \int_W f_n \to \int_W f \quad \forall W \in \mathcal{W}$$
$$\text{und } \sup_n ||f_n|| < \infty.$$

Aufgabe 54 (4 Punkte)**.** *Ein Variationsproblem mit schwacher Konvergenz*
Sei $1 < p < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $f \colon \mathbb{R}^n \times U \to [0, \infty)$ stetig.
(i) Zeigen Sie:

$$u_n \to u \text{ in } W^{1,p}(U) \Longrightarrow \int_U f(\nabla u(x), x)\, \mathrm{d}x \leq \liminf_n \int_U f(\nabla u_n(x), x)\, \mathrm{d}x$$

<u>Tipp:</u> Fatou.
(ii) Sei nun die Abbildung $F \to f(F, x)$ konvex für alle $x \in U$, f ansonsten wie oben. Zeigen Sie:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(U) \Longrightarrow \int_U f(\nabla u(x), x)\, \mathrm{d}x \leq \liminf_n \int_U f(\nabla u_n(x), x)\, \mathrm{d}x$$

<u>Tipp:</u> Mazur.
(iii) Es gelte zudem, dass $f(F, x) \geq C\,|F|^p$ für ein $C > 0$. Sei $g \in L^{p'}(U)$. Zeigen Sie, dass $u \in W_0^{1,p}(U)$ existiert, so dass

$$\int_U f(\nabla u(x), x) - gu \leq \int_U f(\nabla v(x), x) - gv \quad \forall v \in W_0^{1,p}(U)$$

<u>Hinweis:</u> Sie können die $W_0^{1,p}$-Version der Poincaré-Ungleichung benutzen:

$$||u||_{W^{1,p}(U)} \leq c\, ||\nabla u||_{L^p(U)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(U).$$

Diese läßt sich analog zum Fall $p = 2$ durch Reduktion auf eine Dimension beweisen.

Aufgabe 55 (4* Punkte)**.** *Ein Gegenbeispiel zum Lemma von Mazur für schwach* Konvergenz*
Es sei $X = \mathrm{rca}([-1, 1])$, $Y = \{f \mathrm{d}\mathcal{L} : f \in L^1([-1, 1])\}$. Zeigen Sie, dass Y ein abgeschlossener Unterraum von X ist und geben Sie ein Beispiel für eine Folge

$$\{f_n\} \subset Y, \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ in } X, \quad f \notin Y.$$