Universität Bonn WS 2009/2010
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Stefan Müller
Dr. Patrick Dondl

Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen
Blatt 11
Abgabe: 15. Januar 2010

Aufgabe 47 (4 Punkte). *Abgeschlossene Unterräume*

Es seien $1 \leq p < \infty$ und $(\mu, \mathcal{B}, U)$ ein Maßraum mit $\mu(U) < \infty$. Zeigen Sie: Ist X ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(\mu)$, und gleichzeitig ein Unterraum von $L^\infty(\mu)$, so ist X endlichdimensional.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass es eine Konstante $K < \infty$ gibt, so dass $||f||_{L^\infty} \leq K\,||f||_{L^p}$ für alle $f \in X$.

Aufgabe 48 (4 Punkte). *Schwacher Limes*

(i) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $f_j \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} f_j &\to 0 \quad \text{f. ü.} \\ f_j &\rightharpoonup 0 \quad L^2 \\ \text{aber } f_j &\nrightarrow 0 \quad L^2. \end{aligned}$$

(ii) Zeigen Sie: Wenn $g_j \rightharpoonup g$ in L^2, $f_j \to f$ fast überall, $||f_j||_{L^\infty} < M$, dann gilt $f_j g_j \rightharpoonup fg$ in L^2.

Aufgabe 49 (4 Punkte). *Der Raum der regulären Borel-Maße*

Es sei $X = \{f \mathrm{d}\mathcal{L}^n : f \in L^1\}$, wobei $f\mathcal{L}^n(E) := \int_E f \, \mathrm{d}x$.
Zeigen Sie:
(i) $\mu \in X \Rightarrow ||\mu||_{\mathrm{Var}} = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, \mathrm{d}x$.
(ii) X ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathrm{rca}(\mathbb{R}^n)$.
(iii) Es folgt: $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (im Sinne von oben) ist nicht dicht in $\mathrm{rca}(\mathbb{R}^n)$.
Zeigen Sie: Für $\nu \in \mathrm{rca}(\mathbb{R}^n)$ existiert $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_n \varphi \, \mathrm{d}x &\to \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, \mathrm{d}\nu \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \int_{\mathbb{R}^n} |f_n| \, \mathrm{d}x &\to ||\nu||_{\mathrm{Var}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 50 (4+2* Punkte). *BV*

Zeigen Sie:
(i) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist nicht dicht in $BV(\mathbb{R}^n)$.
(ii*) Was ist die ‚beste' Approximation von BV durch C_c^∞-Funktionen?