Universität Bonn WS 2009/2010
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Stefan Müller
Dr. Patrick Dondl

Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen
Blatt 10
Abgabe: 9. Januar 2010

Aufgabe 40 (4 Punkte). *Fortsetzung positiver Funktionale*

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$, sei $B(E)$ der Raum der beschränkten Funktionen auf E und sei X ein Unterraum von $B(E)$. Ferner sei T ein lineares, stetiges, nichtnegatives Funktional auf X, d.h. für alle $f \in X$ gilt

$$|T(f)| \leq ||f|| := \sup_E |f|, \tag{1}$$

$$f \geq 0 \quad \text{in } E \quad \Longrightarrow T(f) \geq 0 \tag{2}$$

Außerdem habe X die Eigenschaft $f \in X \Longrightarrow |f| \in X$. Zeigen Sie, dass es eine lineare Fortsetzung $\bar{T}$ von T auf $B(E)$ gibt, so dass (1) und (2) für $f \in B(E)$ gilt.

Tipp: Bringen Sie die Funktion $f^+ = \max(f, 0)$ ins Spiel.

Aufgabe 41 (4 Punkte). *Differenzierbare Funktionen sind selten, Teil 1*

Es sei C der Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ und es sei Menge

$F_n := \{f \in C : (\exists x_0) \text{ mit } 0 \leq x_0 \leq 1 - 1/n \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \leq n(x - x_0) \text{ für alle } x : x_0 \leq x < 1\}$.

(i) Zeigen Sie, dass F_n eine abgeschlossene Teilmenge von C ist.

(ii) Zeigen Sie, dass F_n nirgends dicht in C ist.

Aufgabe 42 (4 Punkte). *Differenzierbare Funktionen sind selten, Teil 2*

(i) Zeigen Sie, dass die Menge $D \subset C$ der stetigen Funktionen, die an mindestens einem Punkt $x \in [0,1)$ eine endliche Ableitung von rechts besitzen mager ist.

(ii) Zeigen Sie, dass es eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion auf $[0,1]$ gibt.

Aufgabe 43 (4+3* Punkte). *Fréchet-Ableitung*

Welche der folgenden Funktionale sind Fréchet-Differenzierbar? Ermitteln Sie die Ableitung der differenzierbaren und beweisen Sie Ihre Antwort ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen).

(i) $F\colon W^{1,2}(U) \to \mathbb{R}, \quad F(u) = ||u||^2_{W^{1,2}(U)}$

(ii) $F\colon W^{1,2}(U) \to \mathbb{R}, \quad F(u) = ||u||^2_{L^2(U)}$

(iii) $F\colon L^2(U) \to \mathbb{R}, \quad F(u) = ||u||^2_{L^2(U)}$

(iv) $F\colon L^3(U) \to \mathbb{R}, \quad F(u) = ||u||^3_{L^3(U)}$

(v) $F\colon L^3(U) \to \mathbb{R}, \quad F(u) = ||u||_{L^3(U)}$

(vi) Sei $v \in L^2(U)$, $\quad F\colon L^2(U) \to \mathbb{R}, \quad F(u) = \int_U vu$

(vii) U beschränkt. $F\colon L^2(U) \to \mathbb{R}, \quad F(u) = \int_U \sqrt{1+u^2}$

Aufgabe 44 (4* Punkte)**.** *Der Banach-Limes*

Es sei B der Raum der beschränkten Folgen reeller Zahlen, $x = (x_1, x_2, \dots) \in B$ und die Funktion $p\colon B \to R \cup \{\pm\infty\}$ definiert als $p(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

(i) Zeigen Sie: p ist subadditiv und translationsinvariant
(unter Linksverschiebung $Ax = (x_2, x_3, \dots)$).

(ii) Auf dem Unterraum $Y \subset B$ der *konvergenten* Folgen definieren wir nun das lineare Funktional

$$\ell(y) = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Zeigen Sie: ℓ kann auf B fortgesetzt werden, so dass ℓ linear, translationsinvariant und von p dominiert ist und es gilt $\liminf_{n\to\infty} x_n \le \ell(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n$ für $x \in B$.

(iii) Funktionale ϕ mit den Eigenschaften ϕ linear, translationsinvariant und positiv (i.e., $x_n \geq 0\ \forall n \Rightarrow \phi(x) \geq 0$), so dass $\phi(x) = \lim_{x\to\infty} x_n$, falls der Grenzwert existiert, nennt man *Banach-Limes*. Zeigen Sie: Seien ϕ_1, ϕ_2 Banach-Limiten so gilt $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ für die Folge $x = (0, 1, 0, 1, \dots)$. Was ist $\phi_1(x)$? Folgen, auf denen alle Banach-Limiten übereinstimmen nennt man *fast konvergent.*

Tipp: Siehe Verallgemeinerung des Satzes von Hahn-Banach auf Blatt 9.

Aufgabe 45 (4* Punkte)**.** *Magere Mengen*

(i) Zeigen Sie, dass es, für alle $n \in \mathbb{N}$, auf $[0, 1]$ eine nirgends dichte abgeschlossene Menge F_n vom Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1(F_n) \geq 1 - 1/n$ gibt.

(ii) Konstruieren Sie auf $[0, 1]$ eine magere Menge vom Maß 1.

Aufgabe 46 (4* Punkte)**.** *Endlich additive Maße*

Sei $S = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$, $0 < r_i < r_{i+1} < 1/2$ für $i = 1, 2, \dots$, $\lim_{i\to\infty} r_i = 1/2$, $E_i = B(0, r_{i+1}) \setminus B(0, r_i)$, $E_0 = B(0, 1/2)$.

(i) Zeigen Sie: Es gibt ein lineares stetiges Funktional T auf $B(S)$ mit $T(\chi_{E_0}) = 1$, $T(\chi_{E_i}) = i$, für $i \neq 0$, $||T|| = 1$ und $T(f) \geq 0$ für $f \geq 0$.

(ii) Sei $\lambda(E) := T(\chi_E)$ für E aus $\mathcal{B}_0$. Zeigen Sie: λ ist additiv, aber nicht σ-additiv.

(iii) Nach dem Satz von Riesz-Radon gibt es ein eindeutig bestimmtes $\mu \in \mathrm{rca}(S)$, so dass

$$T(f) = \int_S f\, d\mu \quad \forall f \in C(S). \tag{3}$$

Zeigen Sie $\mu \geq 0$ und bestimmen Sie $\mu(B(0, 1/2))$ und $\mu(\overline{B(0, 1/2)})$.

Tipp: Für (i) wenden Sie Aufgabe 40 auf einen geeigneten Unterraum an. Für (iii) vgl. den Beweis des Satzes von Riesz-Radon.