Themen
Funktionalanalysis und PDG
Stefan Müller
WS 2009/2010

1 Lineare Funktionalanalysis

1. Topologische, metrische, normierte Räume, (Prä)-Hilberträume

2. Stetigkeit, Konvergenz, Vollständigkeit, Vervollständigung

3. Kompaktheit, abgeschlossene Einheitskugel kompakt $\Leftrightarrow$ X endlich dimensional

4. Stetige lineare Operatoren, Neumannreihe, Potenzreihen

5. Hilberträume: Projektionssatz, Bestapproximation in konvexen Mengen, Rieszscher Darstellungssatz, Lax-Milgram

6. Dualraum, Hahn-Banach, Trennung von Unterräumen und konvexen Mengen

7. Bairesches Kategorieargument, Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Banach-Steinhaus, Prinzip der offenen Abbildung, Satz vom inversen Operator, Satz vom abgeschlossenen Graphen

8. Schwache Konvergenz, schwach* Konvergenz, schwache Unterhalbstetigkeit der Norm, schwach* Folgenkompaktheit in X' (X separabel), schwache Folgenkompaktheit (X reflexiv), Beispiele reflexiver Räume, Lemma von Mazur, Bestapproximation in konvexen Teilmengen reflexiver Räume, kompakte und vollstetige Operatoren.

9. Endlichdimensionale Approximation: Schauderbasis, Orthonormalbasis, Besselsche Ungleichung, separable Hilberträume isometrisch zu l_2

10. Spektrum, Fredholmoperator, Stetigkeit des Index, $\mathrm{Id} - K$ Fredholm mit Index Null, Fredholmalternative, Pseudoinverse / Parametrix, Spektralsatz für kompakte Operatoren, adjungierter Operator, Spektralsatz für selbstadjungierte kompkate Operatoren, Variationsprinzip für größten/ kleinsten Eigenwert kompakter Operatoren.

2 Funktionenräume

1. L^p: Vollständigkeit, Höldersche Ungleichung, Jensensche Ungleichung, Faltung, Dichtheit von C_c^∞, Kriterium für Kompaktheit, $(L^p)' = L^{p'}$ für $1 \leq p < \infty$, reflexiv für $1 < p < \infty$

2. $W^{1,p}$: Äquivalenz zweier Definition: Abschluß / schwache Ableitung, Approximation durch Faltung, glatte Zerlegung der 1, Produktregel, Kettenregel, Charakterisierung durch Differenzenquotienten, Nullrandwerte, Poincaréungleichung, (kompakte) Soboleveinbettung, schwache Konvergenz, reflexiv für $1 < p < \infty$

3. $C(K)$, K kompakt: Kriterium für Kompaktheit: Arzela-Ascoli, Dualraum $C(K)' = \mathrm{rca}(K)$

4. $C_0(U)$, U offen: Dualraum

5. $\mathrm{rca}(K)$: Variationsnorm, absolute Stetigkeit, Satz von Radon-Nikodym, schwach* Konvergenz

6. $\mathrm{BV}(U)$, U offen: guter Ersatz für $W^{1,1}$, Charakterisierung durch duale Norm

7. $C^{0,\alpha}(U)$: Nicht separabel

8. l_p als einfachstes Beispiel, l_∞ nicht separabel, l_2 Modell für alle separablen Hilberträume, Verschiebungsoperator als Beispiel für unendlichdimensionale Effekte

3 Anwendungen auf elliptische partielle Differentialgleichungen

1. Existenz schwacher Lösungen mit Riesz / Lax-Milgram

2. Regularität: $W^{k,2}_{\mathrm{loc}}$ Theorie mit Differenzenquotienten, C^∞ Lösungen mit Soboleveinbettung

3. Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen, Fredholmalternative

4. Variationsmethode, Existenz für Variationsprobleme mit konvexen Nebenbedingungen, Hindernisproblem: schwache Formulierung, Struktur und Regularität der Lösung in 1d