Universität Bonn
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Stefan Müller
Dr. Patrick Dondl

WS 2009/2010

Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen
Blatt 9
Abgabe: 18. Dezember 2009

Aufgabe 35 (4 Punkte). *Die biharmonische Gleichung*

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie:

$$\int_U |\triangle u|^2 = \int_U \sum_{i,j \le n} |\partial_i \partial_j u|^2$$

für $u \in C_c^\infty(U)$.

(ii) Die biharmonische Gleichung (mit "eingespannten Randbedingungen") ist eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. Sie ist, für U mit hinreichend glattem Rand, gegeben durch

$$\begin{aligned} -\triangle^2 u = f \quad &\text{auf } U \\ u = 0 \quad &\text{auf } \partial U \\ \nu \cdot \nabla u = 0 \quad &\text{auf } \partial U, \end{aligned}$$

für $u \in C^4(U) \cap C^1(\overline{U})$, wobei ν die Normale zu ∂U bezeichnet.
Finden Sie eine schwache Formulierung (in einem geeigneten Unterraum von $W^{2,2}$) dieser Gleichung und zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für $f \in L^2(U)$.

Aufgabe 36 (4 Punkte). *Differenzenquotienten*

Es sei $u \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\Delta^h u(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

der Differenzienquotient der Größe h von u.
Zeigen Sie, dass aus $\left|\left|\Delta^h u\right|\right|_{L^1} \le C \quad \forall h > 0$ nicht notwendigerweise folgt, dass $u \in W^{1,1}(-1,1)$.

Aufgabe 37 (4 Punkte). *Der Dualraum von l^p*

Sei $1 \le p < \infty$. Der (reelle) Folgenraum l^p ist definiert als der Raum aller Folgen $x = (x_k)_{k=1}^\infty$, $x_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$||x||_p := \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \right)^{1/p}$$

endlich ist. Für $y \in L^{p'}$ definiere

$$\mathcal{J}(f)(g) := \sum_{k=1}^\infty f_k g_k.$$

Zeigen Sie:

$$\mathcal{J} : l^{p'} \to (l^p)'$$

ist ein linearer isometrischer Isomorphismus.

Tipp: Für die Surjektivität benutzen Sie $T(e_i)$ für $T \in (L^p)'$, wobei $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots)$, mit der 1 als i-tem Eintrag.

Aufgabe 38 (4 Punkte)**.** *Eine Faltungsabschätzung*

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, $1 \le q < \infty$.
Zeigen Sie: $f * g \in L^r$ und $||f * g||_{L^r} \le ||f||_{L^p} \, ||g||_{L^q}$, für $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, falls $1 \le r < \infty$.

Tipp: Benutzen Sie ohne Einschränkung $||f||_{L^p} = ||g||_{L^q} = 1$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $||u||_{L^r} \le C$ falls für alle $h \in C_c^\infty$ mit $||h||_{L^{r'}} = 1$ gilt $\left|\int uh\right| \le C$. Benutzen Sie dann die Young'sche Ungleichung

$$ABC \le \frac{A^{\alpha p_1} B^{\beta p_1}}{p_1} + \frac{B^{(1-\beta)p_2} C^{\gamma p_2}}{p_2} + \frac{A^{(1-\alpha)p_3} C^{(1-\gamma)p_3}}{p_3}$$

für $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$.

Aufgabe 39 (4* Punkte)**.** *Eine Verallgemeinerung des Satzes von Hahn-Banach*

Seien X ein reeller Vektorraum, $Y \subset X$ ein Unterraum. Seien $p \colon X \to \mathbb{R}$ sublinear, $f \colon Y \to \mathbb{R}$ linear, $f \le p$ auf Y. Desweiteren sei G eine abelsche Halbgruppe linearer Operatoren auf X (i.e., $G \subset \mathcal{L}(X), A, B \in G \Rightarrow AB = BA \in G$ und $\mathrm{Id} \in G$) und es gelte $A \in G \Rightarrow p(Ax) \le p(x) \; \forall x \in X$ und $f(Ay) = f(y) \quad \forall y \in Y$.
Zeigen Sie: Es gibt $F \colon X \to \mathbb{R}$ linear mit $F(y) = f(y) \; \forall y \in Y$, $F(x) \le p(x) \; \forall x \in X$ und $F(Ax) = F(x) \; \forall x \in X$.

Tipp: Definieren Sie $q(x) = \inf \frac{1}{n} p(A_1 x + A_2 x + \cdots + A_n x)$, wobei das Infimum über alle endlichen Folgen von Elementen A_n aus G genommen wird. Zeigen Sie dann, dass q sublinear ist. Benutzen Sie $q(0) = p(0) = 0$ um zu zeigen, dass $q(x)$ nicht $-\infty$ sein kann. Zeigen Sie, dass gilt $f(y) \le q(y)$ für $y \in Y$, und Sie können den Satz von Hahn-Banach anwenden. Es bleibt zu zeigen, dass F invariant unter G ist.