Universität Bonn
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Stefan Müller
Dr. Patrick Dondl

WS 2009/2010

Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen
Blatt 8
Abgabe: 11. Dezember 2009

Aufgabe 31 (4 Punkte)**.** *Grenzwerte von $W^{1,2}$-beschränkten Funktionen*

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T\colon C_c^\infty(U) \to \mathbb{R}$ linear mit
$$|T(\xi)| \leq K \,||\xi||_{L^2}\,.$$
Zeigen Sie: Es gibt ein eindeutiges $\overline{T} \in \mathcal{L}(L^2(U); \mathbb{R})$ mit $\overline{T}|_{C_c^\infty(U)} = T$.

(ii) Es gelte $f_k \to f$ in $L^2(U)$ und $||\partial_i f_k||_{L^2(U)} \leq K$ für alle $i \in 1, \ldots, n$. Zeigen Sie: $f \in W^{1,2}(U)$ und $||\partial_i f||_{L^2(U)} \leq K$.

Tipp: Betrachten Sie $T_k(\xi) = \int \partial_i \xi f_k$ und zeigen Sie $||T_k||_{\mathcal{L}(L^2(U),\mathbb{R})} \leq K$. Gehen Sie für geeignete ξ in $T_k(\xi)$ zum Limes über.

Aufgabe 32 (4 Punkte)**.** *Optimale Poincaré-Konstante in 1d*

Aus dem Folgenden ergibt sich die optimale Abschätzung
$$||u||_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\pi} \left|\left|u'\right|\right|_{L^2(0,1)} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(0,1).$$

(i) Sei $I = (0,1)$ und sei λ der Raleigh-Quotient
$$\lambda := \inf \left\{ \frac{||u'||^2_{L^2(I)}}{||u||^2_{L^2(I)}} : u \in W_0^{1,2}(I) \setminus \{0\} \right\}.$$
Zeigen Sie, dass es $\bar{u} \in W_0^{1,2}(I)$ gibt mit $||\bar{u}||_{L^2(I)} = 1$, $||\bar{u}'||_{L^2(I)} = \lambda$.

Tipp: Betrachten Sie eine Minimalfolge, d.h. $||u_j||_{L^2} = 1, ||u_j'||_{L^2} \to \lambda$. Benutzen Sie die Kompaktheitseigenschaft von Aufgabe 29, zeigen Sie, dass $\left|\left|\frac{v_k + v_l}{2}\right|\right|_{L^2} \to 1$ für eine Teilfoge $v_k = u_{j_k}$ und denken Sie an den Beweis des Projektionssatzes.

(ii) Zeigen Sie, dass gilt
$$\int_I \bar{u}'v' - \lambda \bar{u} v = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(I).$$

(iii) Aus den $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}$-Abschätzungen der Vorlesung folgt
$$-\bar{u}'' = \lambda \bar{u}. \quad (*)$$
Außerdem folgt aus Aufgabe 17, dass $\bar{u} \in C(\bar{I})$ und
$$\bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0. \quad (**)$$
Damit folgt (siehe auch Aufgabe 33), dass $\bar{u} \in C^2$. Bestimmen Sie die Lösung von $(*), (**)$ und ermitteln Sie λ.

Aufgabe 33 (4+2* Punkte)**.** *Stetige schwache Ableitung*

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in W^{1,p}(U)$, $1 \leq p \leq \infty$ und für alle schwachen Ableitungen gelte $\partial_i f \in C(U)$. Zeigen Sie: $f \in C^1(U)$.

Tipp: Zuerst $V \subset\subset U$ auswählen, dann Faltung.

(ii*) Zeigen Sie die analoge Aussage für $W^{k,p}$.

Aufgabe 34 (4+2* Punkte)**.** *Umgekehrte Poincaré-Ungleichung*

(i) Sei $0 < \rho < R$, $B_R = B_R(0)$, $u \in W^{1,2}(B_R)$ und

$$\int_{B_R} \nabla u \nabla v = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(B_R).$$

Zeigen Sie: Es existiert $C > 0$, unabhängig von u, ρ und R, so dass für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{B_\rho} |\nabla u|^2 \leq \frac{C}{(R-\rho)^2} \int_{B_R} |u - c|^2 .$$

(Die optimale Wahl ist $c = \bar{u} := \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R)} \int_{B_R} u$, also das Mittel von u.)

(ii) Sei u eine schwache Lösung von $-\triangle u = f$ in B_1, d.h. $u \in W^{1,2}(B_1)$ und

$$\int_{B_1} \nabla v \nabla u - f v = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(B_1).$$

Zeigen Sie: Es existiert $C > 0$, so dass gilt

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla u|^2 \leq C \left(||u - \bar{u}||^2_{L^2(B_1)} + ||f||^2_{L^2(B_1)} \right).$$

Tipp: Sie können u als $u_1 + u_2$ darstellen, wobei $u_1 \in W_0^{1,2}$ die schwache Lösung von $-\triangle u = f$ ist.

(iii*) Wie lautet die Abschätzung wenn Sie B_R und $B_{R/2}$ statt B_1 und $B_{1/2}$ verwenden?