Universität Bonn WS 2009/2010
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Stefan Müller
Dr. Patrick Dondl

Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen
Blatt 6
Abgabe: 27. November 2009

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.** *Die Fenchel-Konjugierte*

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ und $\exists x : f(x) < +\infty$. Die Fenchel-Konjugierte von f ist definiert als

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (x \cdot y - f(x)).$$

(i) Zeigen Sie: Falls eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ existiert, $g \le f$, so dass g konvex und unter-halbstetig ist dann gilt:

$$f^{**}(x) = \sup\{g(x) : g \text{ konvex, unter-halbstetig und } g \le f\},$$

wobei die Funktion f^{**} ist die zweifach Fenchel-Konjugierte von f darstellt. Ansonsten gilt: $f^*(y) = +\infty \quad \forall y$.

(ii) Sei $n = 1$. Berechnen Sie f^* für $f(x) = \frac{1}{p}\,|x|^p$, $1 \le p < \infty$ und für $f(x) = \exp(x)$.

Aufgabe 22 (4+2* Punkte)**.** *Trennungssätze im* $\mathbb{R}^n$

(i) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, A abgeschlossen und konvex, $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$.
Zeigen Sie: Es existiert ein abgeschlossener Halbraum S in $\mathbb{R}^n$, so dass $A \subset S$, $x \notin S$.

(ii) Zeigen Sie: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann wenn
$f(x) = \sup\{g(x) : g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ affin }, g \le f\}$.

(iii*) Gilt die Charakterisierung von (ii) auch für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup +\infty$?

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.** *Ein Variationsproblem*

Sei $(X, ||\cdot||)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum (für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass gilt: $x, y \in X$, $||x|| \le 1$, $||y|| \le 1$, $\left|\left|\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right|\right| > 1 - \delta \implies ||x - y|| < \varepsilon$). Sei $K \subset X$ konvex, nicht leer und abgeschlossen, $x \in X$.
Zeigen Sie: $\exists y \in K : \operatorname{dist}(x, K) = ||x - y||$.
Was bedeutet das fuer das "fast orthogonale Element"?

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.** *Folgen- und Präkompaktheit*

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie ohne Umweg über Überdeckungskompaktheit: A präkompakt $\implies$ A folgenkompakt.

Aufgabe 25 (4* Punkte)**.** *Stetigkeit der orthogonalen Projektion*

Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ konvex, nicht leer und abgeschlossen. Seien $x, y \in H$, P_K die orthogonale Projektion auf K.
Zeigen Sie: $||P_K(x) - P_K(y)||_H \leq ||x - y||_H$. Insbesondere ist P_K also stetig.

Tipp: Benutzen Sie eine Charakterisierung von P_K und betrachten Sie zunächst $\mathbb{R}$-Vektorräume.