

Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen

Blatt 1

Abgabe: 23. Oktober 2009

Aufgabe 1 (4+2* Punkte). *Konvexität*

Sei X ein Vektorraum über \mathbb{K} ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Eine Menge $E \subset X$ heisst *konvex* falls für alle $x, y \in X$ und für $\lambda \in [0, 1]$ gilt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

(i) Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die *abgeschlossene Einheitskugel* $\overline{B_1(0)} = \{x : \|x\| \leq 1\}$ konvex ist.

(ii) Sei X ein Prähilbertraum. Zeigen Sie, dass $\overline{B_1(0)}$ strikt konvex im folgenden Sinn ist: falls $x, y \in \overline{B_1(0)}$, $x \neq y$ und $\lambda \in (0, 1)$, so gilt $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1$.

Tipp: Betrachten Sie die Funktion $f(\lambda) = \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2$ und deren zweite Ableitung.

(iii*) Sei $|\cdot|_p$ die p -Norm auf \mathbb{R}^n , $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel strikt konvex im Sinne von *ii*) ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Isometrie im Prähilbertraum*

Sei H ein Prähilbertraum und sei $T: H \rightarrow H$ eine Isometrie, d.h. $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \forall x, y \in H$. Zeigen Sie: T ist affin, d.h.

$$T(x) = Lx + x_0,$$

wobei $L: H \rightarrow H$ linear ist und $x_0 \in H$.

(i) Reduktion:

Beweisen Sie die Behauptung: Zum Beweis der Affinität genügt zu zeigen, dass für $\lambda \in (0, 1)$ und $x, y \in H$ gilt

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \Rightarrow T(z) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y). \quad (1)$$

(ii) Zeigen Sie (1).

Tipp: $z := \lambda x + (1 - \lambda)y$, $d := \|x - y\|$. Es gilt dann $z \in \overline{B_{(1-\lambda)d}(x)} \cap \overline{B_{\lambda d}(y)}$. Weiterhin, $\|T(y) - T(x)\| = d$; $\|T(z) - T(x)\| = (1 - \lambda)d$; $\|T(z) - T(y)\| = \lambda d$. Zeigen Sie, dass das nur für $T(z) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$ gelten kann, benutzen Sie dafür Aufgabe 1 (ii).

Aufgabe 3 (4 Punkte). *Injektivität und Surjektivität in unendlichdimensionalen Räumen*

(i) Betrachten Sie $T: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Zeigen Sie: T bildet l_2 auf l_2 ab und T ist injektiv aber nicht surjektiv.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $T: l_2 \rightarrow l_2$ die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte). *Metrik und Norm*

Betrachten Sie auf dem Folgenraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Metrik

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|},$$

wobei $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Zeigen Sie: d ist eine Metrik.

(ii) Sei $\{x^{(j)}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge von Folgen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Zeigen Sie: $d(x^{(j)}, 0) \rightarrow 0 \iff x_i^{(j)} \rightarrow 0 \forall i \in \mathbb{N}$.

(iii) Zeigen Sie: Es gibt keine Norm auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, so dass es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt mit

$$C_1 \|x\| \leq d(x, 0) \leq C_2 \|x\|.$$

Tipp: Widerspruchsbeweis. Sei $e_j = (0, \dots, 1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (j -ter Eintrag in e_j ist eins). Nun kann man sehen, dass $d(4^j e_j, 0) < 2^{-j}$. Es folgt, nach einer kurzen Rechnung, dass dann gilt $\frac{2^{-j}}{C_1} > \|4^j e_j\| = 4^j \|e_j\| > \frac{1}{2C_2} 4^j 2^{-j}$. Das führt zu einem Widerspruch.

Bemerkung: Es gibt auch keine Norm, so dass die schwächere Bedingung

$$\|x^{(j)}\| \rightarrow 0 \iff d(x^{(j)}, 0) \rightarrow 0$$

erfüllt ist.